STUDIEHANDLEDNING

MA1203

Matematik C

MATEMATIK

NATIONELLT CENTRUM FÖR FLEXIBELT LÄRANDE

Innehållsförteckning

CFL ansvarar inte för fortsatt uppdatering av kursmaterialet.
Vuxenutbildare har full rättighet att återanvända materialet
efter eget behov./09-2004

Välkommen till Matematik kurs C.

I denna studiehandledning får du veta det mesta du behöver om kursen och kursens uppläggning från oss lärare som arbetar med den. Om du behöver veta mer eller tycker att något är oklart får du inte tveka att ta kontakt med din lärare eller någon annan på skolan som kan hjälpa dig.

Kursuppläggning

Kursen bygger på att du arbetar dig igenom en lärobok och får det huvudsakliga stödet via en studiehandledning och att du har tillgång till en lärare som du kan ställa frågor till vid behov. Allteftersom du arbetar dig framåt i kursen gör du ett antal obligatoriska studiearbeten som din lärare bedömer och skickar tillbaka till dig.

Distansstudier innebär att du kommer att studera i stort sett helt på egen hand och inte tillhöra någon studiegrupp med förutbestämd studietakt. Det betyder däremot inte att du skall vara helt ensam med matematiken. Du har en lärare som du får ställa alla de matematikfrågor som du behöver svar på. Dessa frågor kan du ställa per e-post, telefon, fax eller vanligt brev. Du skall inte tveka att ta kontakt med din lärare när du kör fast, de är till för att hjälpa dig. Skriv gärna upp din lärares namn, epostadress och telefonnummer i studiehandledningen eller läroboken så finns det lättåtkomligt om du kör fast i dina studier.

Har du frågor som gäller studiemedel, studietakt, behörighet till vidare studier med mera kontaktar du skolans studievägledare, sådana frågor kan lärarna inte svara på.

Kursmaterial
När du arbetar med denna kurs behöver du en lärobok, en formelsamling och en grafritande räknare. I kurspaketet ingår den formelsamling som används vid de nationella proven i matematik. Läroboken köper du själv i bokhandeln. Det finns många bra läromedel, vi har valt att rekommendera **Matematik 3000 kurs C/Komvux** från Natur&Kultur (ISBN 91-27-51027-1) eftersom den i sig har ett upplägg anpassat till vuxna som försöker göra mycket på egen hand.

Allt eftersom du går framåt i kursen gör du **fem obligatoriska studiearbeten**. Dessa uppgifter finns tillsammans med studiehandledningen och löses med papper, penna och miniräknare och skickas till din lärare. Försök gärna att lösa uppgifterna som om de vore på ett prov, det vill säga utan att "tjuvkika" i läroboken hur man skall göra. Meningen med studiearbetena är att du skall få personlig feedback på dina svar och ditt sätt att lösa uppgifter av din lärare. Din lärare skickar tillbaka uppgifterna till dig när han eller hon rättat, kommenterat och/eller gett tips och råd. Studiearbetena är inte betygsgrundande.

Examination
Hur kursen läggs upp i detalj bestämmer din skola. Datum för examination kan du läsa på kursens web-plats eller få av din lärare. **OBS! Alla studiearbeten måste vara bedömda för att få delta i examinationen**.

Kursmoment

Matematik kurs C är på hundra gymnasiepoäng och vi har delat in den i fem delar med tjugo gymnasiepoäng i varje del. Varje del avslutas med att du skickar in ett studiearbete. Du bör göra avsnitten i den ordning vi presenterar dem.

Den första delen av kursen är till stor del repetition av det du lärt dig i tidigare kurser i matematik samt lite om så kallade rationella funktioner, definitionsmängd och värdemängd.

Den andra delen fördjupar dina tidigare kunskaper om funktioner. Framför allt tränar du på att lösa exponential- och potensfunktioner. I detta sammanhang lär du dug också en del om logaritmer.

Del tre och fyra handlar om hur funktionsvärden ändrar sig, dels i ett intervall (genomsnittlig förändringshastighet) och dels i en enskild punkt (derivata). Dessa två delar är de mest centrala delarna av kursen så du bör lägga ner både tid och möda på att både förstå och kunna räkna med derivator.

Den femte och sista delen handlar om talföljder och summor samt lite om kalkylprogram.

Studietips

Just nu kan det kännas att vägen till målet är lång. På sätt och vis är det faktiskt så att vägen tills du är färdig med kursen är lång men du kan göra väldigt mycket redan nu för att den vägen ska bli så lätt som möjligt att ”vandra”. Ja, du kan väl själv ana vart vi vill komma? Just det. Man kan planera, planera och planera.

Studietakt

En bra takt för en kurs på 100 gymnasiepoäng är mellan en hel och en halv en termin (dvs. ca 20 veckor) för att du skall ha tid att reflektera över det du lär dig och att det inte blir för mycket av korvstoppning. Du kan dock själv påverka längden på kursen till mycket stor del: t.ex kan din arbetssituation vara sådan att du inte kan läsa på helfart men det kan också vara så att du just nu har mycket tid. Heltidsstudier innebär en takt på 20 gymnasiepoäng per vecka. Vill du veta mer om krav på studietakt, vad som händer om du inte håller din studietakt m m tar du kontakt med någon studievägledare eller kurator.

Studieteknik

Innan du börjar titta på närmare på kursen vill vi att du läser om och reflekterar runt studieteknik, lärande och räknande. När man läser på distans är det extra viktigt att man har en studieteknik som fungerar. Därför vill vi poängtera några saker.

Bekanta dig med materialet

Gå igenom läroboken och annat som behövs i de olika momenten i denna kurs. Titta i innehållsförteckningen. Bläddra igenom några kapitel för att se hur de är uppbyggda. Läs skolverkets kursmål och betygskriterier.

Att studera
Skapa en förförståelse. Det gör du genom att du innan du börjar läsa en text bekantar dig med den. Bläddra igenom det kapitel du just ska läsa. Titta på kapitelrubriker och bilder. Stanna upp vid sådant du tycker är särskilt intressant. Gå tillbaka till början. Skumläs texten och skriv upp sådant du fastnar på. Kontakta läraren om du behöver mer förklaringar. Anteckna sådant du vill komma ihåg. Stryk under!

Anteckningsteknik
Använd gärna tankekarta. Rita in bilder och egna associationer. Använd olika färger. Allt som underlättar för minnet är bra. Originella associationer är speciellt effektiva. Använd helst stolpar, tänk dig att du ska göra sammanfattande rubriker på det du läser.

Studieplanering
Lägg gärna upp det hela som ett veckoschema, där du har speciella, fasta tider olika dagar i veckan då du inte gör någonting annat. Dina studier måste nämligen få lov att ta tid. Det är en sysselsättning att studera, precis som att jobba på hel- eller deltid. Om man exempelvis vill bli en duktig simmare, så måste man naturligtvis träna. Det gäller samma sak när man studerar. Ytterligare en fördel med fasta studietider är att de faktiskt kan göra det lättare att vara ledig. Om man inte har någon bestämd studieplan kan det nämligen hända att man blir så fixerad vid att plugga att man alltid har det över sig, att det alltid ligger och skaver i bakhuvudet, så att man till sist inte har någon fritid alls, samtidigt som man inte heller får studierna att fungera. Man är mycket aktivare om man tar ett par timmar i taget. Sedan kan man känna att man gjort sitt och kan syssla med något annat.

Motivation
Tänk inte att du ska göra allt på en gång. Försök att dela in dina studier i etapper på vägen mot det stora målet. När ett avsnitt är klart går du vidare till nästa etapp. Belöna dig själv. Efter sista passet för veckan eller när du avslutat en insändningsuppgift gör du något du särskilt tycker om. Se till att ställa till med kalas när kursen är slut. De små målen blir då etapper på väg mot den stora festen!

Studiemiljö
Din tid är viktig, det gäller att vara "ekonomisk" med tiden och utnyttja den på bästa sätt. Därför är en bra studieplats viktig. När du väljer plats för ditt läsande är det bra om

- du kan stänga dörren om dig och vara ifred och koncentrera dig,
- du har plats för och ordning på dina böcker, pärmar m m, så att du inte behöver ödsla tid på att leta saker,
- du har bra belysning så att du inte blir så trött i ögonen,
- du möblerar så att det känns trivsamt.

Inlärnings- och studietips

- **Formulera** målet med dina studier. Varför vill du lära dig detta? Försök att motivera dig själv på så många olika sätt som möjligt.

- **Dela** in ditt mål i mindre, konkreta mål, dvs. ta ett litet steg i taget. Bestäm dig t.ex. för att du t.o.m. fredag ska ha gjort två delkapitel i boken. Belöna dig efter det att du nått ditt delmål.

- **Planera** och organisera dina studier. Ditt arbete underlättas om du avgränsar och begränsar tiden, annars kan det kännas som om pluggandet aldrig tar slut. Gör gärna i ordning en egen studiehörna där du kan ha läroböcker, andra hjälpmedel och dina egna anteckningar framme.

- **Repetera!**

- **Var positiv**. Gläd dig åt det du faktiskt gjort.

- **Reflektera** över dina egna strategier för att lära dig detta matematik. Förlita dig på dina egna resurser och det du faktiskt redan kan! Vilket sätt att lära dig föredrar du till exempel? Lär du dig främst genom att se? Kanske genom att höra eller göra? Eller möjligen kombinationer av dessa? Det kanske t o m är olika för olika ämnesområden.

- **Försök** att hitta någon som du kan studera tillsammans med och bolla idéer och tankar med. Den fågel som inte prövar sina vingar lär sig aldrig flyga.

- **Rita** och skriv upp det du känner (vet) i uppgiften på ett papper så klarnar ofta bilden av vad du skall räkna ut. Stryk under dina delresultat och ditt slutresultat. Redovisa till sist svaret separat. På proven bedömer vi inte bara svaren utan också hur figurer ritas, hur du tänker, motiverar och räknar uppgifterna.

- **När** du löser problem - använd dig av dina förkunskaper för att förstå sammanhanget. Gör upp en plan för hur du skall lösa problemet. Följ din plan. Kontrollera att din lösning verkar rimlig. Är den inte det börjar du om med en ny plan.

- **Bli vän** med din miniräknare. Att sitta på ett prov med en räknare som man inte är van att använda kan ge dig oväntade problem.

- **Nya kunskaper** innebär ofta nya sätt att tänka. Träna därför främst förståelse, inte en massa "lösryckta regler". Testa dina kunskaper genom att delta i diskussioner och se tillämpningar av de nya kunskaperna runt omkring dig.

- **Att lära** sig nya saker är att glänta på porten till en ny kultur! Var nyfiken, ta del av den nya kulturen och våga slänga de fördomar om matematikkulturen som du kanske har. Ta alla chanser att få delta i kulturen.

- **Traggla inte** i timtal om du kör fast på någon uppgift. Lägg bort den ett tag och gör en annan uppgift i stället. Gå till den besvärliga uppgiften vid ett senare tillfälle.

Till sist: Gör små pauser eftersom för långa pass gör dig trött. Ät och drick gärna lite mellan varven; hjärnan arbetar när du tänker. En tur i motionsspåret, en promenad eller annan fysisk aktivitet är också bra avbrott. Kroppen behöver röra på sig och det du läst, skrivit eller räknat faller på plats under tiden.

Litteraturtips

Vi rekommenderar för närvarande Matematik 3000 kurs C/Komvux som lärobok, men det finns även andra bra läromedel. Ibland kan det vara en fördel att se saker förklarade på andra sätt eller mer ingående. Nedan följer några tips på böcker att låna och läsa.

Läromedel i matematik
Nedanstående bok är avpassad till den förra läroplanen men kan ändå vara användbara.

- Räkna till Max Grundbok C, *Danielsson m fl*, Gleerups Förlag.

Böcker om matematik och matematiker
Matematikhistoria ingår i kursmålen.

- Matematikens kulturhistoria, *John McLeish*, Forum
- Människorna bakom matematiken, *Jan Unenge*, Studentlitteratur
- Om mått och män, *Sten von Friesen*, Bra Böcker
- Liten guide för matematiska problemlösare, *Bengt Ulin*, Natur och Kultur
- Matematik med kalkylprogram, *D. Sjöstrand och P. Melander*, YD Science&Arts

Att känna till något om hur dagens matematiska kunskap växt fram i olika kulturer och veta lite om de människor som bidragit till detta är dessutom både intressant och allmänbildande.

Användbara webbadresser

Här har vi samlat en del adresser för dig har tillgång till Internet och är intresserad.

Fråga Lund om matematik:
http://www.maths.lth.se/query/

Nationella prov i matematik:
http://www.umu.se/edmeas/np/information/np-tidigare-prov.html

Formelsamling till nationella prov i matematk C, D och E:
http://www.umu.se/edmeas/np/np-prov/formlerCDE.pdf

Ämne: Matematik
Kurs: Matematik C
Kurskod: MA1203
Poäng: 100

Mål enligt Skolverket

Mål som eleverna skall ha uppnått efter avslutad kurs

Eleven skall

- kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,
- kunna tolka och använda logaritmer och potenser med reella exponenter samt kunna tillämpa dessa vid problemlösning,
- kunna ställa upp, förenkla och använda uttryck med polynom samt beskriva och använda egenskaper hos några polynomfunktioner och potensfunktioner,
- kunna ställa upp, förenkla och använda rationella uttryck samt lösa polynomekvationer av högre grad genom faktorisering,
- kunna använda matematiska modeller av olika slag, däribland även sådana som bygger på summan av en geometrisk talföljd,
- känna till hur datorer och grafiska räknare kan utnyttjas som hjälpmedel vid studier av matematiska modeller i olika tillämpade sammanhang,
- kunna förklara, åskådliggöra och använda begreppen ändringskvot och derivata för en funktion samt använda dessa för att beskriva egenskaper hos funktionen och dess graf,
- kunna härleda deriveringsregler för några grundläggande potensfunktioner, summor av funktioner samt enkla exponentialfunktioner och i samband därmed beskriva varför och hur talet e införs,
- kunna dra slutsatser om en funktions derivata och uppskatta derivatans värde numeriskt då funktionen är given genom sin graf,
- kunna använda sambandet mellan en funktions graf och dess derivata i olika tillämpade sammanhang med och utan grafritande hjälpmedel.

Betygskriterier enligt Skolverket

Kriterier för betyget Godkänd

- Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
- Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
- Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

Kriterier för betyget Väl godkänd

- Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
- Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
- Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
- Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

- Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
- Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
- Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
- Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.

Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

Och nu börjar matchen!

När du nu har läst igenom denna studiehandledning är det dags att sätta igång "på allvar". Titta igenom din lärobok och gör en tidsplan för dina studier Tag sedan gärna kontakt med din lärare och presentera dig och din matematikstudieplan. Det är bra att upprätta en studerande-lärar-kontakt så fort som möjligt och så känns det mer som att du verkligen har påbörjat dina studier. Nu är det upp till dig att sätta studiebollen i rullning, tillsammans ska vi jobba för att göra mål.

Förord

Vår ambition med denna studiehandledning är att den skall guida dig genom boken Matematik 3000 kurs C/Komvux av Lars-Eric Björk, Hans Brolin ochRoland Munther. Vi beskriver kortfattat vad kapitlen handlar om och när det är dags att skicka in kursens fem studiearbeten. Viktiga begrepp som du måste förstå är understrukna. Gör gärna en egen liten ordlista där du med egna ord skriver ner vad dessa begrepp betyder.

Lycka till med studierna önskar matematiklärarna på Nationellt centrum för flexibelt lärande.

Hur använder jag kursboken?

1. Läs ”Till lärare och elever” före innehållsförteckningen. Där skriver författarna hur boken är upplagd och hur de har tänkt att boken ska användas.

2. Titta sedan i innehållsförteckningen och skaffa dig en överblick över vilka moment som ingår i kursen. Gör upp en personlig tidsplan för dina studier: När tänker du starta kursen och när skall du avsluta kursen. Däremellan skall du göra insändningsuppgifterna och skicka dem till din lärare. Kom ihåg att planera in tid till repetition också.

3. Läs studiehandledningen som kommer direkt efter innehållsförteckningen.

4. Studera momentet problemlösning på nästa sida. Håll det som står där aktuellt oavsett vilka problem du löser.

Sedan är det dags att ta itu med räknandet. Då du börjar med ett nytt kapitel i boken (moment i kursen) gör du så här.

- Läs **studiehandledningen** i början av kapitlet för att få en överblick av vad du skall kunna när kapitlet är klart. Där kopplas innehållet ihop med Skolverkets kursplan. Därefter läser du **sammanfattningen** i slutet av kapitlet för att få en mer konkret bild av vad du ska kunna när kapitlet är klart.

- Varje kapitel innehåller ett antal färdiglösta exempel i **blå text**. Studera dem noga och hör av dig till din lärare om du inte förstår dem.

- Gör uppgifterna som finns i boken. Om du tycker att det är lätta uppgifter och/eller för mycket likadana uppgifter så gör bara varannan eller var tredje uppgift så att du kommer framåt. Räkna sedan de överhoppade övningarna när du repeterar. Ta kontakt med din lärare om du inte förstår hur man kommer fram till det svar som finns i bokens facit.

- Efter sammanfattningen finns *Blandade övningar*. Spara med att göra dem tills det börjar bli dags för examinationen. När man repeterar är det bra att lösa några nya uppgifter som man inte sett förut.

De uppgifter som finns under rubriken "Problemlösning" är bra övningar. Lös några sådana lite nu och då under kursens gång.

Problemlösning

Allmängiltig strategi

1. Förstå problemet.

- Vad söks?
- Vad är givet?
- Verkar problemet rimligt?
- Rita en figur om det går.
- Inför lämpliga beteckningar.

2. Gör upp en plan.

- Har du sett detta tidigare?
- Har du löst något liknande förut?
- Kan du dela in i delproblem?
- Kan du lösa eventuella delproblem?
- Saknas det fakta?
- Var kan du finna fakta som saknas?

3. Genomför planen.

- Kontrollera varje steg.
- Stryk under resultat.
- Fungerar det ej gör du upp en ny plan.

4. Se tillbaka. **Glöm inte detta steg!**

- Är resultatet rimligt?
- Kan man lösa problemet på ett annat sätt?
- Är resultatet eller metoden användbar i andra sammanhang?

Exempel

En stor bulle kostar 2 kr mer än en liten bulle. Hur mycket kostar en liten bulle om sju små kostar lika mycket som fem stora?

Du skall ta reda på vad en liten bulle kostar. Det är givet att en stor kostar 2 kr mer än en liten och att 7 små bullar kostar lika mycket som 5 stora.
Problemet verkar rimligt.
Pris för liten bulle: x kr
Pris för stor bulle: y kr

Skriv ut vad som söks:
Sökt: x
Skriv ner de matematiska sambanden mellan x och y som du känner:
$y = x + 2$ (1)
$7x = 5y$ (2)
Eftersom vi har två obekanta och två ekvationer bör detta gå att lösa.
Sätt in uttrycket för y som finns i ekvation (1) i ekvation (2).

$7x = 5y = 5(x+2)$
$7x = 5x + 10$
$2x = 10$
$\underline{x = 5}$
Planen verkade fungera, vi har räknat ut att en liten bulle kostar 5 kr.

Det verkar rimligt att en liten bulle kostar 5 kr. För att vara riktigt säker fortsätter man sina beräkningar.
Sätt in $x = 5$ i ekvation (1) -> $\underline{y = 7}$
Sätt in $x = 5$ och $y = 7$ i ekvation (2). ->
$\underline{7x = 35 = 5y}$
Eftersom VL = HL har vi räkna rätt.
<u>Svar: En liten bulle kostar 5 kr</u>.
Metoden är alltid användbar då man löser linjära ekvationssystem med två obekanta.
Det finns fler sätt att lösa detta problem.

Kapitel 1, Algebra och funktioner

Läs först studiehandledningen på sidan 12. Titta sedan igenom sammanfattningen på sidorna 72-73 för att bilda dig en mer detaljerad uppfattning om innehållet i kapitlet.

1.1 Polynom
I detta avsnitt repeteras begreppet polynom, räkneregler för polynom, faktorisering av polynom samt polynom i faktorform och lösning av andragradsekvationer. Avsnittet är viktigt för hela kursen, färdigheterna kommer att behövas fler gånger så håll detta aktuellt.

1.2 Rationella uttryck
Här kommer ett nytt begrepp, "rationellt uttryck". Med det menas ett uttryck med ett polynom i nämnaren t ex $\dfrac{3x-7}{2-x}$ och $\dfrac{4}{x^2-3}$.

När man arbetar med rationella uttryck måste man hålla i minnet att dessa inte är definierade för de x-värden som gör att nämnaren blir lika med noll. I det första exemplet ovan är uttrycket ej definierat för $x = 2$, i det andra är uttrycket ej definierat för $x = \sqrt{3}$. Vissa x-värden ingår alltså inte i funktionens definitionsmängd. Endast tal ur en funktions definitionsmängd kan generera tal till funktionens värdemängd.

I övrigt är det repetition och fördjupning av bråkräkning:
• Förkortning och förlängning av bråk
• Addition och subtraktion av bråk
• Multiplikation och division med bråk

För att du skall känna att du är igång med dina studier är det dags att göra det första studiearbetet och skicka till din lärare nu.

1.3 Funktionsbegreppet
Från och med nu används den allmänna beteckningen $f(x)$ för funktioner av x (står det $f(t)$ är det en funktion av t). Denna beteckning är mycket vanlig, därför är det viktigt att du förstår den. Uppgifterna på sid 40-41 är mycket viktiga.

I övrigt är det repetition av linjära funktioner och andragradsfunktioner.

Nu är det dags att göra test 1:1A på sidan 46. Följ anvisningarna i rutan längst ner till höger när du är klar. Om det var svårt att klara test 1:1B kontaktar du din lärare så kan du få fler uppgifter att öva på innan du går vidare.

1.4 Exponential- och potensfunktioner
Exponentialfunktioner är mycket viktiga när man studerar eller gör kalkyler för sådant där tillväxten eller minskningen är en konstant procentuell förändring. T ex om värdeminskningen på en bil är 11% per år, hur mycket är den värd om 7 år om den idag är värd 60000 kr?

Potenslagarna från A-kursen repeteras och du får träna på att lösa andragradsekvationer på ett annat sätt än med pq-formeln.
Tidigare har du lärt dig att lösa andragradsekvationer t ex

$$x^2 = 14 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{14}$$

Här lär du dig ett likvärdigt sätt att skriva ”roten ur *x*” genom att använda potenslagarna för tal med rationella exponenter (exponenter i form av bråk). Ovanstående ekvation kan därför även lösas så här

$$x^2 = 14 \qquad \Rightarrow \qquad x = 14^{1/2}$$

Ekvationer av högre grad kan lösas på motsvarande sätt

$$x^5 = 63 \qquad \Rightarrow \qquad x = 63^{1/5}$$

$$x^{\frac{2}{3}} = 87 \qquad \Rightarrow \qquad x = 87^{3/2}$$

1.5 Logaritmer

Här får du lära dig logaritmlagarna och att lösa exponentialekvationer med hjälp av logaritmer. Det gäller samma sak som alltid för ekvationslösning: det du gör med höger led måste du också göra med vänster led. Här gäller alltså att logaritmerar du höger led måste du logaritmera vänster led. Det spelar ingen roll om du använder naturliga logaritmer, ln, eller tio-logaritmer, lg (log på miniräknaren) när du löser problemen så länge som du är konsekvent och använder samma logaritmsystem i vänster led och höger led, se exemplen nedan.

$$3^x = 57$$
$$\ln 3^x = \ln 57$$
$$x \ln 3 = \ln 57$$
$$x = \frac{\ln 57}{\ln 3} \approx 3,68$$

$$3^x = 57$$
$$\log 3^x = \log 57$$
$$x \log 3 = \log 57$$
$$x = \frac{\log 57}{\log 3} \approx 3,68$$

Logaritmlagarna finns även i formelsamlingen.

Gör test 1:2A på sidan 71. Avsnitten "Arbeta utan räknare 1" på sidorna 76-77 och "Problemlösning 1" på sidan 78 är mycket bra övningar som tränar huvudräkning och analytisk förmåga. Om du vill kan du spara de blandade övningarna tills du skall repetera kursen inför provet.

Gör nu studiearbete 2 och skicka det till din lärare.

Plats för egna anteckningar och frågor:

Kapitel 2, Förändringshastigheter och derivator

Läs först studiehandledningen på sidan 80. Titta sedan igenom sammanfattningen på sidorna 124-125 för att skaffa dig en mer detaljerad uppfattning om innehållet i kapitlet.

2.1 Förändringshastigheter
Detta avsnitt förbereder dig för kursens absolut viktigaste moment: derivator. Här studerar du kurvors genomsnittliga lutning i ett visst intervall, den s k ändringskvoten. Du har tidigare räknat med sådana på B-kursen då du bestämde lutningen för en rät linje, nu är det fråga om att bestämma lutningen på en krökt kurva. Ändringskvoten för det aktuella intervallet är i själva verket inget annat än riktningskoefficienten för den räta linje som går genom de två punkter på kurvan som begränsar intervallet.

Ändringskvoten kallas ibland för differenskvoten, en mycket bra beskrivning av vad det är fråga om; kvoten mellan två differenser k $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Författarna visar även hur man går tillväga för att bilda sig en uppfattning om hur mycket en kurva lutar i en punkt. Den räta linje som går genom denna punkt på kurvan och lutar lika mycket som kurvan lutar kallas kurvans tangent (den bara tangerar kurvan, se gärna på bilden på sidan 91 i boken).

2.2 Begreppet derivata
Derivatans definition och tolkning är troligtvis helt nya områden inom matematiken för dig såvida du inte läst denna kurs förut. Ta därför god tid på dig att läsa, räkna och förstå detta avsnitt, särskilt sid 90-92. Dra dig inte för att ta kontakt med din lärare om du tycker att detta är svårt.

Derivatan av en funktion talar om hur värdet av funktionen ändrar sig i en viss punkt. Om funktionen är $f(x)$ skrivs derivatan $f'(x)$. Då betyder $f'(3)$ riktningskoefficienten för den linje som precis tangerar kurvan då $x = 3$. Eftersom denna speciella linje endast tangerar kurvan kallas den för tangent. Observera att $f'(x)$ är en konstant om $f(x)$ är en linjär funktion, om $f(x)$ är en icke-linjär funktion är även $f'(x)$ en funktion av x (kurvan lutar ju olika mycket på olika ställen).

Många avancerade beräkningar, både inom teknik och ekonomi, bygger på att man kan räkna på hur olika storheter varierar med t ex tiden. Tänker du studera mer matematik eller ämnen där matematik är ett viktigt verktyg på gymnsienivå eller högre så kommer du garanterat att stöta på derivator en hel del. Passa på att lägga en bra grund redan nu, det lönar sig.

Nu är det dags att göra test 2:1A på sidan 100.

2.3 Deriveringsregler
En viktig bit av matematiken är att upptäcka mönster och ur dem kunna dra allmängiltiga slutsatser. Dessa slutsatser kallas ofta regler (t ex konjugatregeln) eller satser (t ex Pythagoras sats). Om du tar fram derivator för olika funktioner enligt definitionen ett antal gånger kommer du att kunna se matematiska mönster som kan sammanfattas till regler. Eftersom många redan har gjort det behöver du inte göra det om du inte vill, det viktigaste är att du kan tillämpa dessa deriveringsregler. Deriveringsreglerna finns på sidan 103 (polynomfunktioner),

sidan 110 (potensfunktioner) samt sidorna 112 och 114 (exponentialfunktioner) i läroboken. Dessa regler finns även i din formelsamling. Att kunna använda deriveringsreglerna är ett absolut krav för att bli godkänd på kursen.

Gör test 2:2A på sidan 120. Avsnitten "Arbeta utan räknare 2" på sidorna 122-123 och "Problemlösning 2" på sidan 130 är mycket bra övningar som tränar huvudräkning och analytisk förmåga. Om du vill kan du spara de blandade övningarna tills du repeterar kursen inför provet.

Nu är det dags att göra studiearbete 3.

Plats för egna anteckningar och frågor:

Kapitel 3, Kurvor och derivator

Läs först studiehandledningen på sidan 132. Titta sedan igenom sammanfattningen på sidorna 166-167 för att bilda dig en mer detaljerad uppfattning om innehållet i kapitlet. Träna även på att använda din grafritande räknare, både för att lösa uppgifter och för att kolla om du verkar ha räknat rätt för hand.

3.1 Vad säger förstaderivatan om grafen?
Här får du lära dig hur man med hjälp av derivator kan undersöka en kurvas utseende. Tecknet, + eller $-$, för derivatan $f'(x)$ avgör om funktionen är växande (om x ökar så ökar $f(x)$) eller avtagande (om x ökar så minskar $f(x)$).

Derivatans tecken	**Funktionen är**	**Tangentens riktningskoefficient**
positiv	växande	positiv
negativ	avtagande	negativ

För det x där derivatan $f'(x) = 0$ har funktionen $f(x)$ en lokal maximipunkt, lokal minimipunkt eller en terasspunkt. Genom att undersöka tecknet på derivatan kring detta x-värde kan man ta reda på vilken typ av punkt det är.

Teckenväxling	**Punkt**
$+0-$	maximipunkt
$-0+$	minimipunkt
$+0+$, $-0-$	terasspunkt

Då koordinaterna efterfrågas för funktionens extremvärden och/eller terasspunkter gör man så här:

- x-koordinaten är det x för vilket $f'(x) = 0$,
- y-koordinaten är det värde du får då du sätter in x-koordinaten i $f(x)$.

Ibland efterfrågas funktionens största och minsta värde inom ett givet intervall. Då måste även $f(x)$ på intervallgränsen beräknas eftersom dessa funktionsvärden kan vara större än lokala maxima eller mindre än lokala minima i intervallet.

Nu är det dags att göra test 3:1A på sidan 146.

3.2 Derivator och tillämpningar
Här löser du beräkningsproblem från olika områden som t ex geometri, ekonomi och biologi med hjälp av derivator.

Gör test 3:2A på sidan 162. Avsnitten "Arbeta utan räknare 3" på sidorna 164-165 och "Problemlösning 3" på sidan 170 är bra övningar som tränar huvudräkning och analytisk förmåga. Om du vill kan du spara de blandade övningarna tills du repeterar kursen inför provet.

Nu är det dags att göra studiearbete 4.

Kapitel 4, Talföljder och summor

Läs först studiehandledningen på sidan 172. Titta sedan igenom sammanfattningen på sidan 195 för att bilda dig en mer detaljerad uppfattning om innehållet i kapitlet.

4.1 Talföljder
Talföljder är följder av tal som skrivs i en viss ordning och där varje tal bildats efter någon regel. Dessa regler kan se ut på många sätt. Regeln kan till exempel vara att nästa tal i följden är 5 större än det föregående: 2, 7, 12… (exempel på en aritmerisk talföjd) eller att nästa tal är tre gånger så stort som det föregående: 2, 6, 18, 54… (exempel på en geometrisk talföjd). Sådana regler kan sammanfattas i formler när man väl har upptäckt mönstret i talföljden. I detta avsnitt tränar du både att räkna ut vad ett tal i en talföljd skall bli med hjälp av en färdig formel och att själv finna mönstret och sammanfatta det i en formel.

4.2 Summor
Ofta är man intresserad av att summera alla tal i en begränsad talföljd. När det gäller summan för aritmetiska talföljder (där differensen är konstant mellan två på varandra följande tal) och när det gäller summan för geometriska talföljder (där kvoten är konstant mellan två på varandra följande tal) finns det färdiga formler hur man relativt snabbt och enkelt gör sina beräkningar. I boken presenteras dessa formler och man visar också hur man själv kan komma fram till dessa formler. Givetvis finns dessa summaformler även i formelsamlingen.

4.3 Tillämpningar
Geometriska summor är användbara t ex om man vill räkna hur mycket pengar man har på ett bankkonto efter ett antal år om räntan är konstant och man under tiden sätter in ett visst bestämt belopp med jämna mellanrum eller för att beräkna koncentrationen av ett läkemedel i kroppen som tillförs satsvis (t ex injiceras) samtidigt som det även bryts ner med en viss hastighet.

4.4 Kalkylmodeller
Här visas viktiga principer för hur kalkylprogram fungerar. Träna på att skriva och använda formler i kalkylblad och låt datorn göra massor av upprepade (utträkande) rutinberäkningar. Du skall tänka och maskinen räkna.

Gör test 4 på sidan 190. Avsnitten "Arbeta utan räknare 4" på sidorna 192-193 och "Problemlösning 4" på sidan 194 är bra övningar som tränar huvudräkning och analytisk förmåga. Om du vill kan du spara de blandade övningarna tills du repeterar kursen inför provet.

Nu är det dags att göra studiearbete 5 samt att anmäla sig till det avslutande examinationen. Därefter repeterar du kursen.

Alla studiearbeten skall vara bedömda innan du kan delta i examinationen!

Skriva matematik på dator, miniräknare och papper

Vid multiplikation används * och vid division används / när du skriver på dator. Du måste skriva ut parenteser om du skall beräkna tal som t ex $\frac{3+5}{0,008\cdot 65}$ på datorn eller miniräknaren.

För att beräkna $\frac{3+5}{0,008\cdot 65}$ skriver du (3+5)/(0,008*65)[=] så får du det rätta svaret.

Du kommer att behöva skriva saker där "de fyra räknesätten" (+ - × ÷) inte räcker. Här följer en liten samling:

Vanligt skrivsätt	**Sagt i ord**	**Dator**	**Grafritande räknare**	**Teknisk räknare** [1)]	**Uträknat**
3^2	3 i kvadrat	3^2 sqr(3)	3[x^2] 3[^]2	3[x^2]	9
3^5	3 upphöjt till 5	3^5 3**5	3[^]5	3[x^y]5[=] 3[y^x]5[=] 3[^]5[=]	243
$\sqrt{3}$	(kvadrat)roten ur 3	(3)^.5 3^(1/2) rot(3) sqrt(3)	[$\sqrt{\ }$]3 3[^].5 3[^](1/2)	[$\sqrt{\ }$]3[=] 3[x^y](.5)[=] 3[y^x](.5)[=] 3[^](.5)[=]	1,73
$\sqrt{4/\pi}$	roten ur (4/π)	(4/π)^.5 rot(4/π) sqrt(4/π)	[$\sqrt{\ }$](4/π) (4/π)[^].5	[$\sqrt{\ }$](4/π)[=] (4/π) [x^y](.5)[=] (4/π) [y^x](.5)[=] (4/π) [^](.5)[=]	1,128
$\sqrt[3]{2}$	tredjeroten ur 2	2^(1/3)	2[^](1/3)	2[x^y](1/3)[=] 2[^](1/3)[=] 2[x^y]3[1/x][=]	1,25

1) De olika fabrikaten har ibland olika beteckningar för samma funktion. Knappen för "upphöjt till" är [^], [x^y] eller [y^x] beroende på vilken räknare du har.

Kalkylprogram, grundkunskaper (Av Jeff Forssell, SSV)
(*engelska termer visas i kursiv text)*

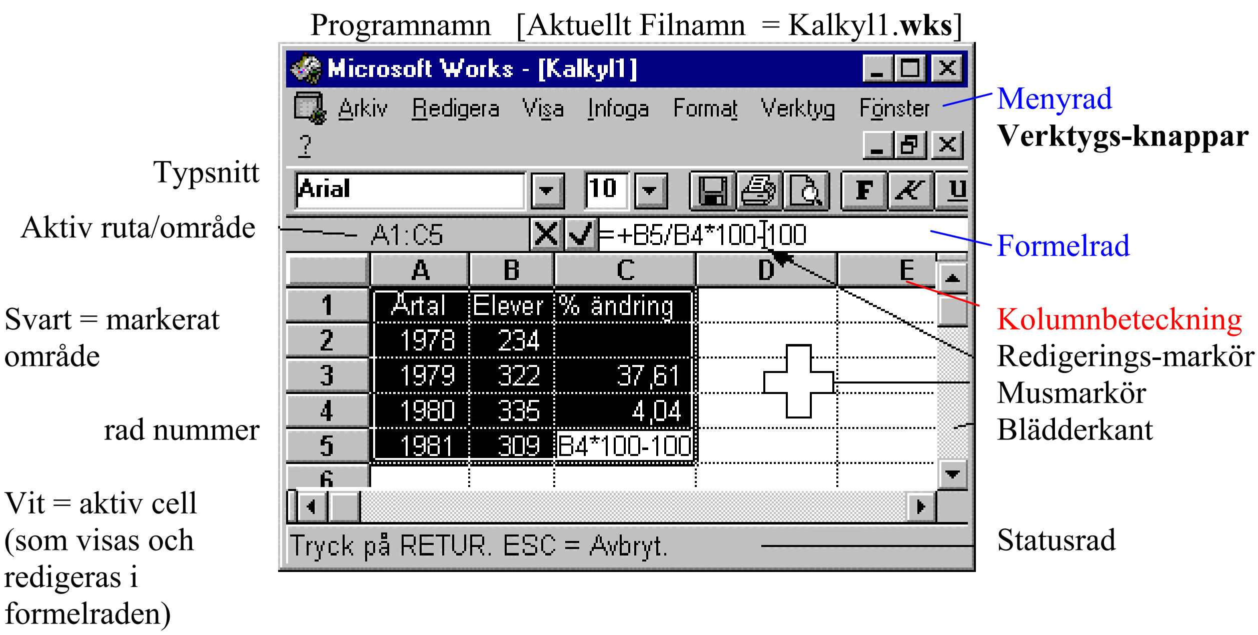
Se skärmbilden från WORKS nedan (Det är rätt likt Excel, Claris Works, mm program)
Markör (*cursor)* : visar var på skärmen datorn har sin uppmärksamhet riktad.
Kalkylblad (*spreadsheet)* : En tabell-liknande arbetsyta för att arbeta med uträkning.
Arbetsbok: flera samhörande kalkylblads"sidor"
Ruta (*cell)* : B3 = cell i kolumn B i rad 3.
Cellmarkör visar den aktiva cellen (avvikande färg eller ram)
Redigeringsmarkör (|)i cellen/formelraden som visar var nästa tecken hamnar. **F2-**knappen på tangentbordet ger dig möjlighet att gå in och redigera i en cell utan att skriva om den.

En cell kan innehålla antingen:

- text (spiller över i tomma rutor till höger) I skärmbilden nedan innehåller celler **A1, B1** och **C1** dvs område **A1:C1** text.

- tal (olika format- %, tid, bestämt antal decimaler, låst=skyddad mot ändring, valuta, ###### = talet får inte plats m m). I bilden nedan innehåller område **A2:B5** tal, **C4** och **C5** "ser ut som" tal, men är resultat av formler.

- formel Börja med =, skriv sedan din formel eller använd fördefinierade funktioner. Man kan peka ut celler/områden. Vill du använda ett tal som finns i en viss cell t ex cell B3 i en formel skriver du cellens namn (B3) eller klickar på denna cell istället för att skriva in talet . Vanliga celladresser ändras vid kopiering av formler. Om formeln **=B3/4,3** kopieras en cell neråt blir formeln i den undre cellen =**B4/4,3**). Skall du alltid använda värdet i cellen B3 i din formel skrivs formeln så här =**B3/4,3** (Då använder du en absolut adress som inte ändras). I nedanstående bild innehåller område **C3:C5** formler, och i formelraden kan man se **C5**s formel.



Övning 1 med Excel

I denna övning skall du låta datorn göra en massa beräkningar och därmed bespara dig en massa arbete. Du skall beräkna summan, differensen, produkten och kvoten av ett antal parvisa tal, *x* och *y*, med hjälp av egenhändigt skrivna funktioner.

1. Starta Excel

2. Gör ett tabellhuvud med utseendet $x \quad y \quad x+y \quad x-y \quad x*y \quad x/y$ i kalkylbladet genom att skriva *x* i cell A1, *y* i cell B1 o s v.

3. Skriv in några *x*-värden i kolumn A och lika många *y*-värden i kolumn B.

4. Klicka på cell C2. Skriv ett likhetstecken, klicka på cell A2, skriv ett plustecken, klicka på cell B2. I formelraden skall det nu stå =A2+B2. Tryck sedan på enter-tangenten. I cell C2 finns nu summan av talen som står i cellerna A2 och B2.

5. Nu skall motsvarande formler skrivas i cellerna D2, E2 och F2 (d v s =A2-B2, =A2*B2 och =A2/B2).

6. Markera nu cellerna C2-F2. ”Ta tag” i markeringens nedre högra hörn med markören (markören blir ett ✚)och dra ner markeringen så långt som dina *x*- och *y*-värdetabeller sträcker sig. Tryck ”enter”. Nu är alla dina beräkningar klara.

7. Hitta på några egna beräkningar som skall göras och utför dem med hjälp av funktioner som du själv skriver.

FORMLER TILL NATIONELLT PROV I MATEMATIK
KURS C, D OCH E

ALGEBRA

Regler

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\end{aligned}\right\}\text{ (kvadreringsregler)}$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \quad \text{(konjugatregeln)}$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Andragrads-ekvationer

Ekvationen $x^2+px+q=0$ har rötterna

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \text{ och } x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

där $x_1+x_2=-p$ och $x_1\cdot x_2=q$

ARITMETIK

Prefix

T	G	M	k	h	d	c	m	μ	n	p
tera	giga	mega	kilo	hekto	deci	centi	milli	mikro	nano	piko
10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}

Potenser

För reella tal x och y och positiva tal a och b gäller

$$a^xa^y=a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y} \qquad \left(a^x\right)^y=a^{xy}$$

$$a^xb^x=(ab)^x \qquad \frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x \qquad a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x} \qquad a^0=1$$

Logaritmer

För positiva tal x och y gäller:

$$10^x=y,\ x=\lg y \qquad \mathrm{e}^x=y,\ x=\ln y$$

$$\lg xy=\lg x+\lg y \qquad \lg\frac{x}{y}=\lg x-\lg y$$

$$\lg x^p=p\cdot\lg x$$

Geometrisk summa

$$a+ak+ak^2+\ldots+ak^{n-1}=\frac{a(k^n-1)}{k-1} \text{ där } k\neq 1$$

DIFFERENTIAL- OCH INTEGRALKALKYL

Derivatans definition

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Deriveringsregler

Funktion	Derivata
x^a där x är ett reellt tal	ax^{a-1}
a^x $(a > 0)$	$a^x \ln a$
$\ln x$ $(x > 0)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
e^{kx}	$k \cdot e^{kx}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Kedjeregeln

Om $y = f(z)$ och $z = g(x)$ är två deriverbara funktioner så gäller för den sammansatta funktionen $y = f(g(x))$ att

$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ eller $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

Några primitiva funktioner

$f(x)$	$F(x)$ (C är en reell konstant)
k	$kx + C$
x^n $(n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

DIFFERENTIALEKVATIONER

Homogena ekvationer

Av 1:a ordningen: $y' + ay = 0$
Lösningarna kan skrivas $y = Ce^{-ax}$

Av 2:a ordningen: $y'' + ay' + by = 0$
Den karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ har rötterna r_1 och r_2
Om r_1 och r_2 är reella tal och $r_1 = r_2$ så kan lösningarna skrivas
$y = (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{r_1 x}$
Om r_1 och r_2 är reella tal och $r_1 \neq r_2$ så kan lösningarna skrivas
$y = C_1\mathrm{e}^{r_1 x} + C_2\mathrm{e}^{r_2 x}$
Om $r_1 = s + \mathrm{i}t$ och $r_2 = s - \mathrm{i}t$ kan lösningarna skrivas
$y = \mathrm{e}^{sx}(C_1 \cos tx + C_2 \sin tx) = r\mathrm{e}^{sx} \cdot \sin(tx + \varphi)$

Inhomogena ekvationer

Generellt bestäms den allmänna lösningen som $y = y_h + y_p$, där y_p är en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen och y_h den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation.

Separabla differentialekvationer: $g(y)y' = f(x)$
Löses enligt $\int g(y)dy = \int f(x)dx$

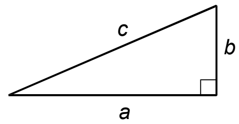
FUNKTIONSLÄRA

Räta linjen	$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Riktningskoefficient för linje genom punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) där $x_1 \neq x_2$
	$y = kx + m$	Linje genom punkten (0, m) med riktningskoefficienten k
	$y - y_1 = k(x - x_1)$	Linje genom punkten (x_1, y_1) med riktningskoefficienten k
	$k_1 \cdot k_2 = -1$	Villkor för vinkelräta linjer
Exponential-funktioner	$y = C \cdot a^x$	C och a är konstanter $a > 0$ och $a \neq 1$
Potensfunktioner	$y = C \cdot x^a$	C och a är konstanter

GEOMETRI

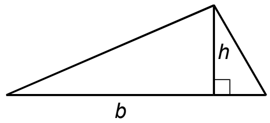
Pythagoras sats

$$a^2 + b^2 = c^2$$



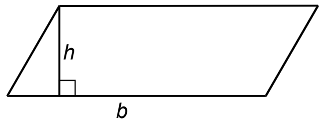
Triangel

$$\text{area} = \frac{bh}{2}$$



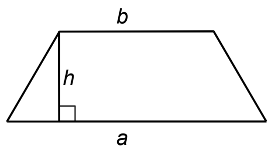
Parallellogram

$$\text{area} = bh$$



Parallelltrapets

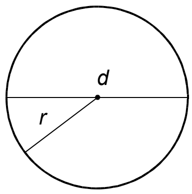
$$\text{area} = \frac{h(a+b)}{2}$$



Cirkel

$$\text{area} = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

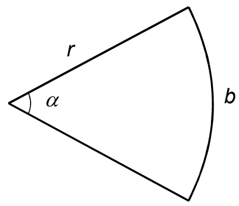
$$\text{omkrets} = 2\pi r = \pi d$$



Cirkelsektor

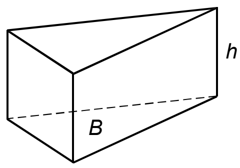
$$\text{bågen } b = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$$

$$\text{area} = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2 = \frac{br}{2}$$



Prisma

$$\text{volym} = Bh$$

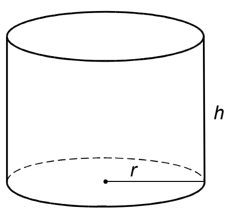


Cylinder

Rak cirkulär cylinder

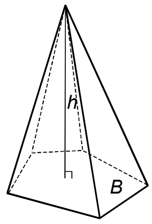
$$\text{volym} = \pi r^2 h$$

$$\text{mantelarea} = 2\pi rh$$



Pyramid

$$\text{volym} = \frac{Bh}{3}$$

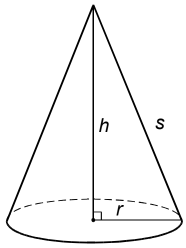


Kon

Rak cirkulär kon

$$\text{volym} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

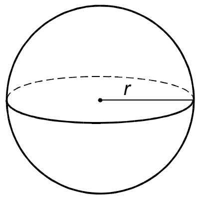
$$\text{mantelarea} = \pi r s$$



Klot

$$\text{volym} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$\text{area} = 4\pi r^2$$

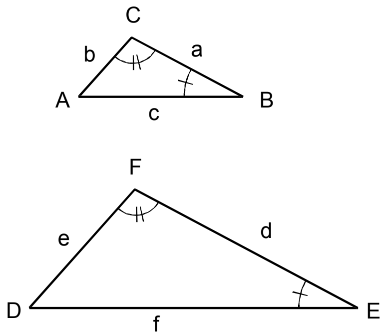


Likformighet

För likformiga geometriska figurer gäller att motsvarande vinklar är lika stora och att förhållandet mellan motsvarande sidor är lika.

Trianglarna ABC och DEF är likformiga.

Då gäller $\frac{b}{e} = \frac{c}{f}$

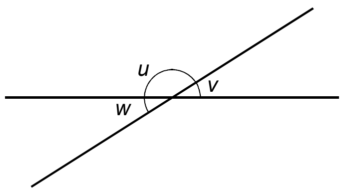


Skala

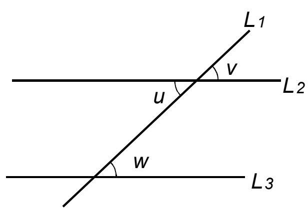
Areaskalan = (Längdskalan)^2 Volymskalan = (Längdskalan)^3

Vinklar

När två räta linjer skär varandra är sidovinklarnas summa 180º (t.ex. $u + v$ =180º) och vertikalvinklar lika stora (t.ex. $w = v$).



När en linje L_1 skär två andra inbördes parallella linjer L_2 och L_3 så är likbelägna vinklar lika stora (t.ex. v = w) och alternatvinklar lika stora (t.ex. $u = w$)



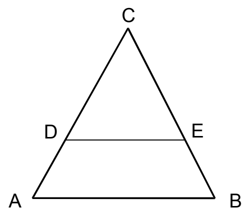
Omvänt gäller att om alternatvinklar eller likbelägna vinklar är lika stora så är linjerna L_2 och L_3 parallella.

Topptriangel- och transversalsatsen

Om DE är parallell med AB gäller

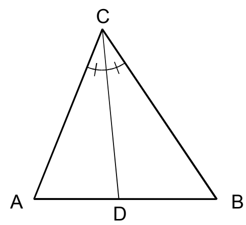
$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{BC}} \text{ och}$$

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AD}}=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{BE}}$$



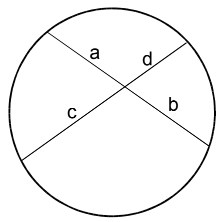
Bisektrissatsen

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$$



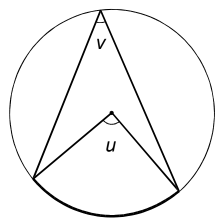
Kordasatsen

$ab = cd$



Randvinkelsatsen

Medelpunktsvinkeln till en cirkelbåge är dubbelt så stor som randvinkeln till samma cirkelbåge $(u = 2v)$



KOMPLEXA TAL

Representation

$z = x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ där x, y, r och φ är reella tal samt $\mathrm{i}^2 = -1$

Argument

$\arg z = \varphi \qquad \tan\varphi = \dfrac{y}{x}$

Absolutbeloppet

$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Konjugat

Talen $z = x + \mathrm{i}y$ och $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ kallas konjugerade tal

Räknelagar

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big) = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big) = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

de Moivres formel

$$z^n = \big(r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$$

Eulers formler

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

NUMERISKA METODER

Ekvationslösning

Newton-Raphsons iterationsformel: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Integraler

Intervallet $a_0 \le x \le a_n$ delas in i n delintervall.
Mittpunkten i varje delintervall betecknas $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Rektangelmetoden: $\displaystyle\int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx = \frac{a_n - a_0}{n}\big(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\big)$

Trapetsmetoden: $\displaystyle\int_{a_0}^{a_n} f(x)\,dx = \frac{a_n - a_0}{2n}\big(f(a_0) + 2f(a_1) + 2f(a_2) + \ldots + 2f(a_{n-1}) + f(a_n)\big)$

Differential-ekvationer

$y' = f(x, y)$, steglängd h

Eulers metod (tangentmetoden): $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$

Mittpunktsmetoden: $y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(x_n + \dfrac{h}{2},\ y_n + \dfrac{h}{2} \cdot k\right)$ där $k = f(x_n, y_n)$

TRIGONOMETRI

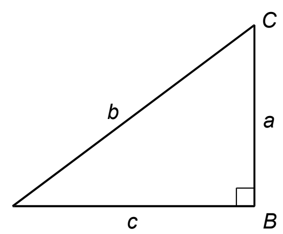
Definitioner

ABC är en rätvinklig triangel.

$$\sin A = \frac{a}{b} \quad \left(\frac{\textit{motstående katet}}{\textit{hypotenusan}}\right)$$

$$\cos A = \frac{c}{b} \quad \left(\frac{\textit{närliggande katet}}{\textit{hypotenusan}}\right)$$

$$\tan A = \frac{a}{c} \quad \left(\frac{\textit{motstående katet}}{\textit{närliggande katet}}\right)$$

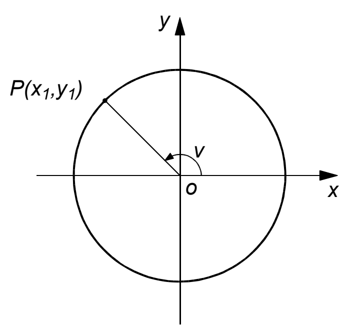


OP är radie i en enhetscirkel.
Koordinaterna för P är (x_1, y_1)

$$\sin v = y_1$$

$$\cos v = x_1$$

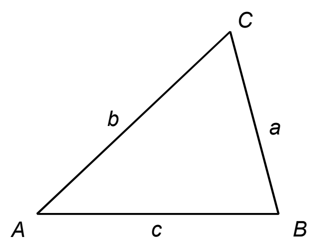
$$\tan v = \frac{y_1}{x_1}$$



Sinussatsen $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

Cosinussatsen $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Areasatsen $\text{arean} = \frac{ab\sin C}{2}$



Trigonometriska formler

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$
$$a\sin x + b\cos x = c\sin(x+v) \text{ där } c = \sqrt{a^2+b^2} \text{ och } \tan v = \frac{b}{a}$$

Exakta värden

Vinkel v (grader)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
(radianer)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin v$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan v$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Ej def.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0